

# Tema 3: Movimiento plano

Mecánica Racional, 2º, Grado en Ingeniería Civil

Escuela Técnica Superior de Ingenieros

Universidad de Sevilla

- Definición y propiedades
- Centro instantáneo de rotación
  - Definición
  - Determinación gráfica y analítica
- Teorema de los tres centros
- Campo de aceleraciones

## Definición

Los movimientos de todos los puntos son paralelos a un plano dado, llamado plano director

Condición matemática  $d\vec{r}_{21}^P(t) \cdot \vec{u}_\pi = 0$

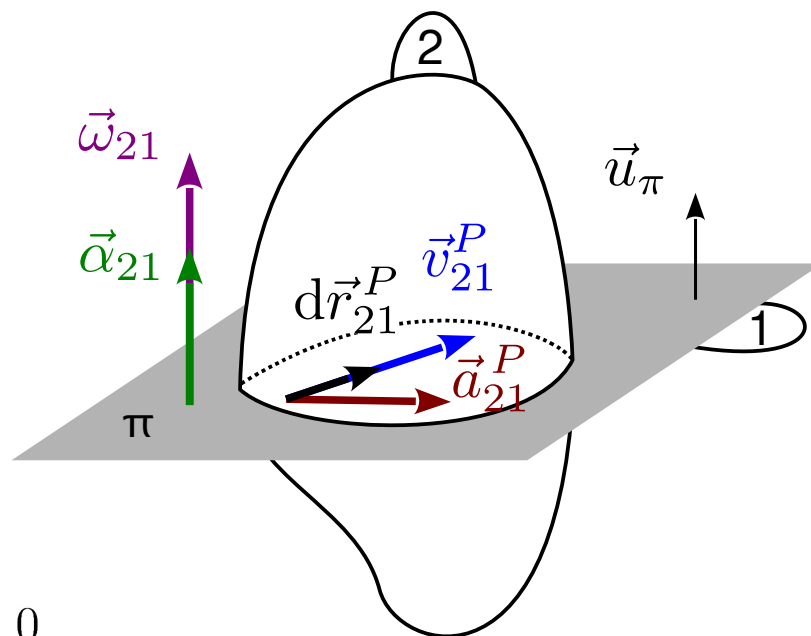
## Propiedades

Las velocidades y aceleraciones son paralelas al plano director

$$d\vec{r}_{21}^P \cdot \vec{u}_\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad dt \vec{v}_{21}^P(t) \cdot \vec{u}_\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_{21}^P(t) \cdot \vec{u}_\pi = 0}$$

Diferenciando respecto al sólido "1"

$$d(\vec{v}_{21}^P(t) \cdot \vec{u}_\pi)_1 = 0 = d\vec{v}_{21}^P(t) \cdot \vec{u}_\pi + \vec{v}_{21}^P(t) \cdot d\vec{u}_\pi = dt \vec{a}_{21}^P(t) \cdot \vec{u}_\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{21}^P(t) \cdot \vec{u}_\pi = 0}$$



## Propiedades

Los vectores velocidad angular y aceleración son perpendiculares al plano director

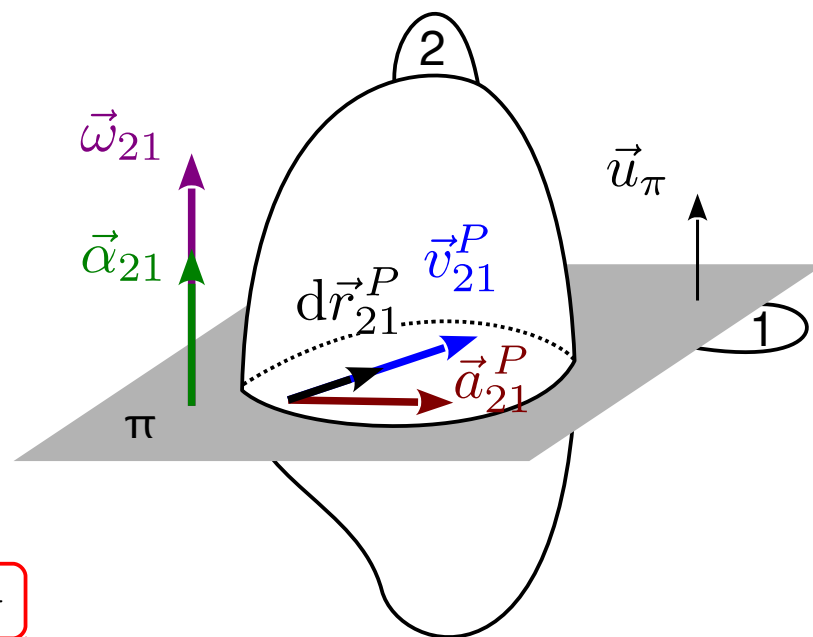
$$\vec{u}_\pi \cdot [\vec{v}_{21}^P - \vec{v}_{21}^Q] = 0 = \vec{u}_\pi \cdot [\vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{QP}(t)]$$

$$\overrightarrow{QP}(t) \cdot [\vec{u}_\pi \times \vec{\omega}_{21}] = 0 \quad \forall \overrightarrow{QP}(t)$$

$$\vec{u}_\pi \times \vec{\omega}_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\omega}_{21} = \omega_{21}(t) \vec{u}_\pi}$$

Diferenciando respecto al sólido "1"

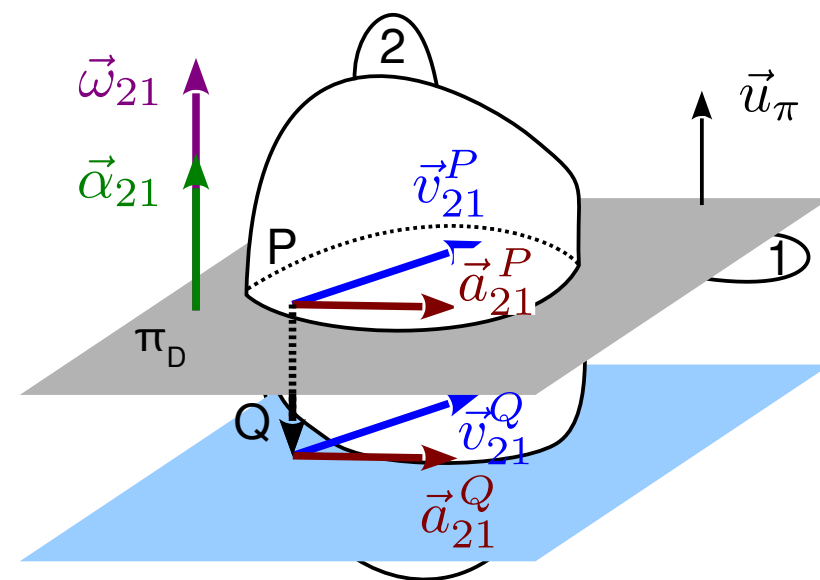
$$\vec{\alpha}_{21} = \left. \frac{d\vec{\omega}_{21}}{dt} \right|_1 = \frac{d\omega_{21}}{dt} \vec{u}_\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha}_{21} = \alpha_{21}(t) \vec{u}_\pi}$$



## Propiedades

Las distribuciones de velocidad y aceleración son iguales en planos paralelos al director

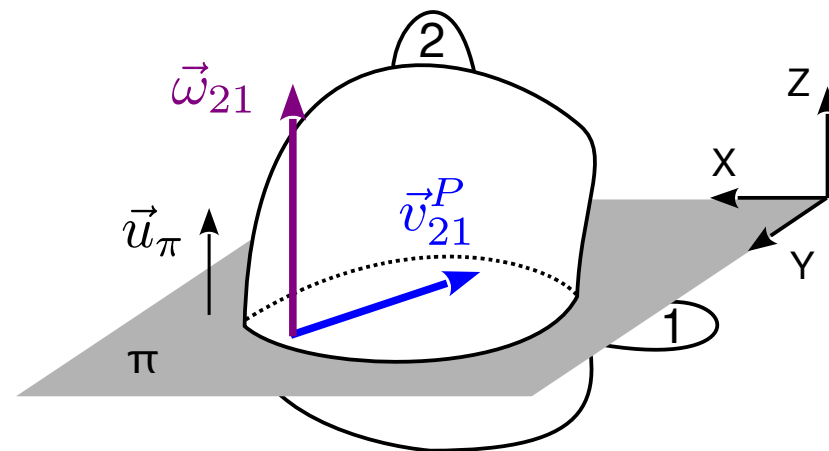
$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} \parallel \vec{u}_\pi \\ \overrightarrow{PQ} \parallel \vec{\omega}_{21} \\ \overrightarrow{PQ} \parallel \vec{\alpha}_{21} \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{l} \vec{v}_{21}^P(t) = \vec{v}_{21}^Q(t) \\ \vec{a}_{21}^P(t) = \vec{a}_{21}^Q(t) \end{array}$$



El movimiento tiene tres grados de libertad y en el caso más general es una rotación instantánea

$$\vec{\omega}_{21} = \omega_{21} \vec{u}_\pi \quad \vec{v}_{21}^P = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

$$\vec{v}^{\text{mín}} = \vec{v}_{21}^P \cdot \vec{\omega}_{21} = \vec{0}$$



- Definición y propiedades
- Centro instantáneo de rotación
  - Definición
  - Determinación gráfica y analítica
- Teorema de los tres centros
- Campo de aceleraciones

## Definición

Es la intersección del eje instantáneo de rotación y el plano director

$$I_{21} \equiv \Delta_{\text{EIR}\{21\}} \cap \pi_D$$

## Propiedades

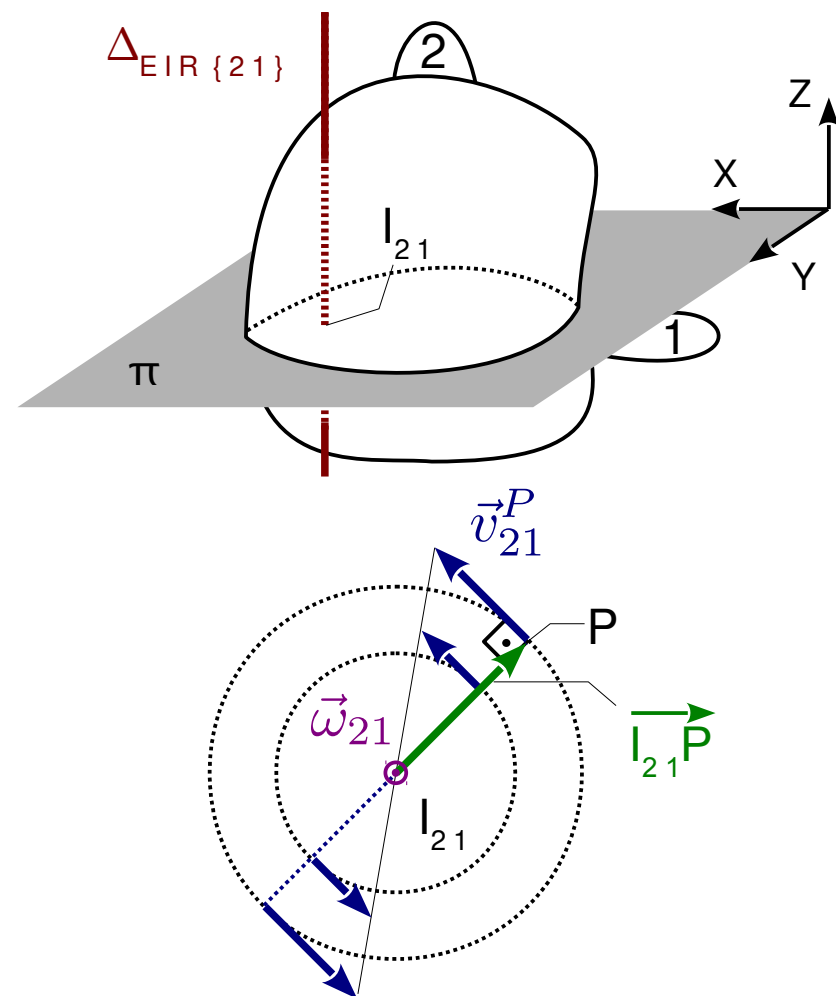
Es el único punto del sólido "2" con velocidad instantánea nula

$$\vec{v}_{21}^{I_{21}} = \vec{0}$$

El campo de velocidades tiene simetría rotacional alrededor de  $I_{21}$

$$\vec{v}_{21}^P = \vec{v}_{21}^{I_{21}} + \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{I_{21}P}$$

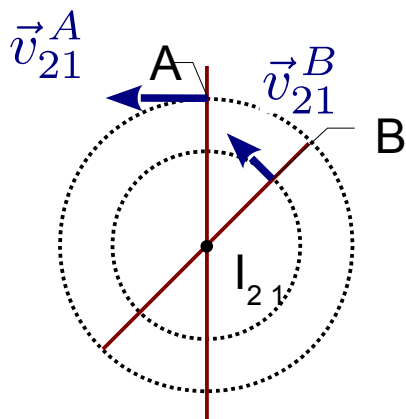
$$\vec{v}_{21}^P \perp \overrightarrow{I_{21}P} \quad |\vec{v}_{21}^P| = |\vec{\omega}_{21}| |\overrightarrow{I_{21}P}|$$



## Caso 1

$\vec{v}_{21}^A, \vec{v}_{21}^B$  no paralelas

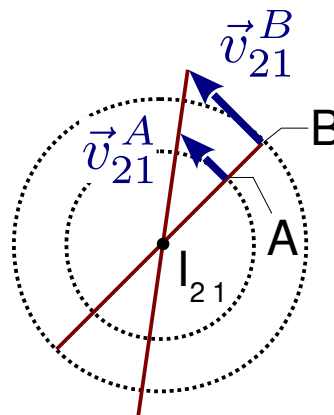
$I_{21}$  es la intersección de las rectas trazadas por cada punto perpendicularmente a las velocidades respectivas



## Caso 2

$\vec{v}_{21}^A, \vec{v}_{21}^B$  paralelas

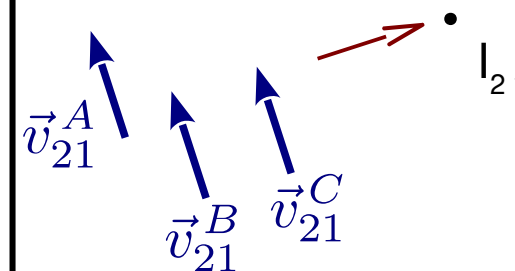
$I_{21}$  es la intersección de la perpendicular común y la recta que une los extremos de los vectores velocidad



## Traslación paralela

$\vec{v}_{21}$  es la misma en todos los puntos

$I_{21}$  se considera en el infinito, en dirección perpendicular a la velocidad de traslación



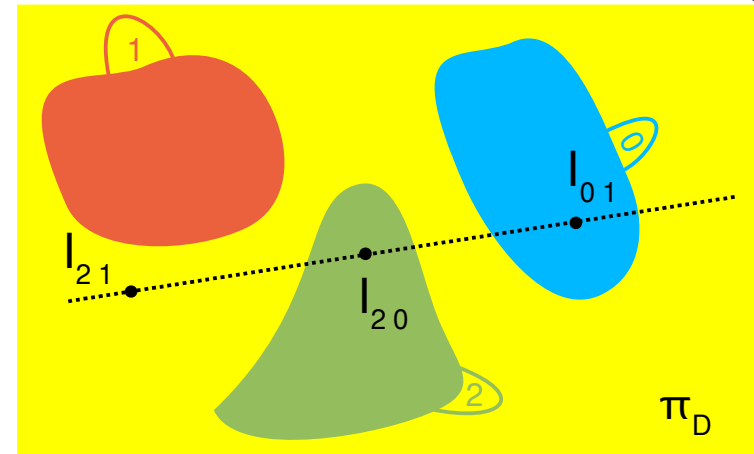
Determinación a partir de la reducción

$$\vec{OI}_{21} = \frac{\vec{\omega}_{21} \times \vec{v}_{21}^O}{|\vec{\omega}_{21}|^2}$$



- Definición y propiedades
- Centro instantáneo de rotación
  - Definición
  - Determinación gráfica y analítica
- Teorema de los tres centros
- Campo de aceleraciones

Si tres sólidos rígidos realizan movimientos relativos planos y paralelos entre sí, y se elige un plano director común, entonces los tres centros instantáneos de rotación están alineados

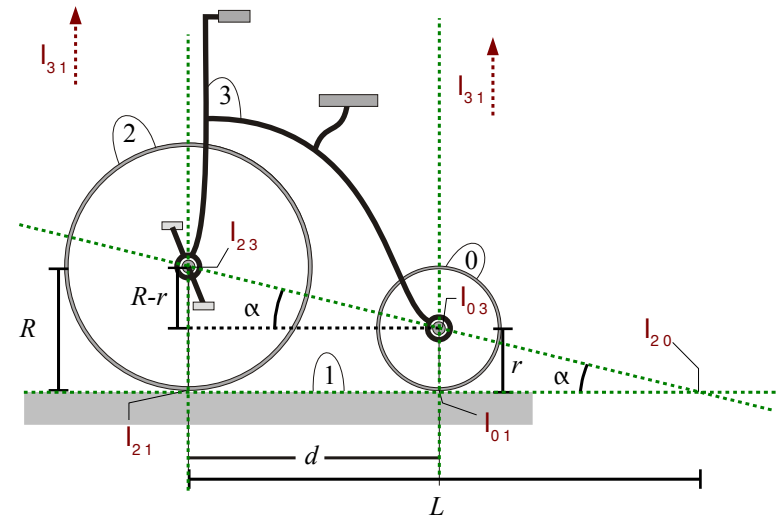


## Aplicación

$I_{20}$  se encuentra como intersección de  $I_{23}I_{03}$  y  $I_{21}I_{01}$

$I_{31}$  se sitúa en el infinito

$$L = \frac{R}{\tan \alpha} = \frac{Rd}{R-r}$$



# Teorema de los tres centros: demostración

Punto A arbitrario

$$\vec{v}_{21}^A = \vec{v}_{20}^A + \vec{v}_{01}^A$$

Campos de velocidades

$$\vec{v}_{21}^0 + \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{I_{21}A} = \vec{v}_{20}^0 + \vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{I_{20}A} + \vec{v}_{01}^0 + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{I_{01}A}$$

Composición de velocidades angulares

$$(\vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01}) \times \overrightarrow{I_{21}A} = \vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{I_{20}A} + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{I_{01}A}$$

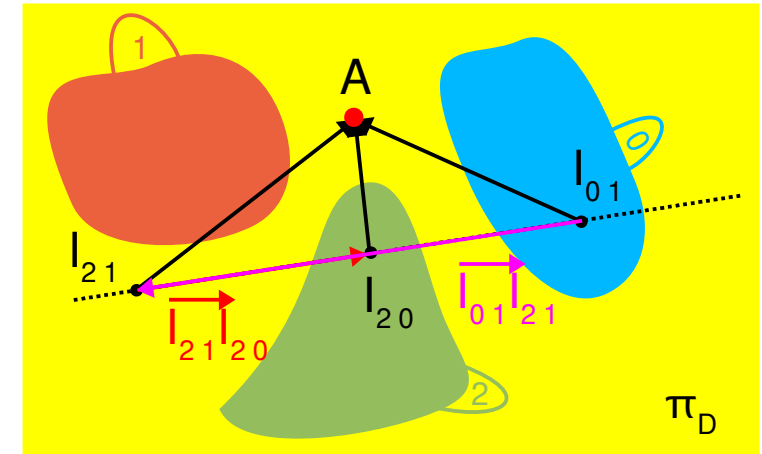
$$\vec{\omega}_{20} \times (\overrightarrow{I_{21}A} - \times \overrightarrow{I_{20}A}) = \vec{\omega}_{01} \times (\overrightarrow{I_{01}A} - \times \overrightarrow{I_{21}A}) \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{I_{21}I_{20}} = \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{I_{01}I_{21}}$$

Multiplicando escalarmente por  $\overrightarrow{I_{01}I_{21}}$

$$\overrightarrow{I_{01}I_{21}} \cdot (\vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{I_{21}I_{20}}) = \overrightarrow{I_{01}I_{21}} \cdot (\vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{I_{01}I_{21}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_{20} \cdot (\overrightarrow{I_{21}I_{20}} \times \overrightarrow{I_{01}I_{21}}) = 0$$

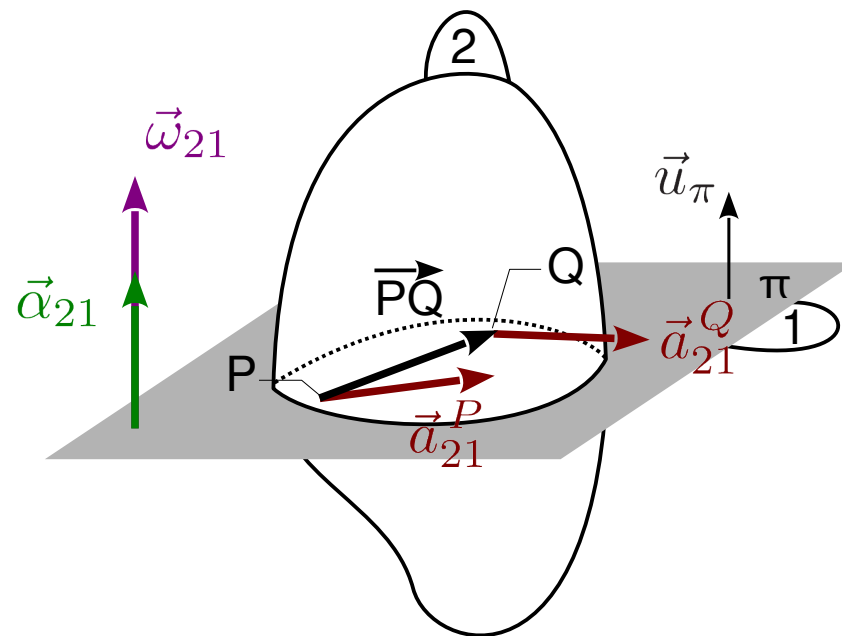
Como  $\vec{\omega}_{20} \perp \pi_D$  y  $\overrightarrow{I_{21}I_{20}} \times \overrightarrow{I_{01}I_{21}} \perp \pi_D$

$$\overrightarrow{I_{21}I_{20}} \times \overrightarrow{I_{01}I_{21}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{I_{21}I_{20}} \parallel \overrightarrow{I_{01}I_{21}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\{I_0, I_1, I_2\} \text{ alineados}}$$



- Definición y propiedades
- Centro instantáneo de rotación
  - Definición
  - Determinación gráfica y analítica
- Teorema de los tres centros
- Campo de aceleraciones

La ecuación del campo de velocidades se simplifica respecto al caso de movimiento tridimensional, pues  $\omega_{21}$  y  $\mathbf{PQ}$  son perpendiculares



$$\vec{a}_{21}^Q = \vec{a}_{21}^P + \vec{\alpha}_{21} \times \overrightarrow{PQ} - |\vec{\omega}_{21}|^2 \overrightarrow{PQ}$$

El campo de aceleraciones recupera una cierta estructura

