Tema 3: Movimiento plano

Mecánica Racional, 2º, Grado en Ingeniería Civil

Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingenieros

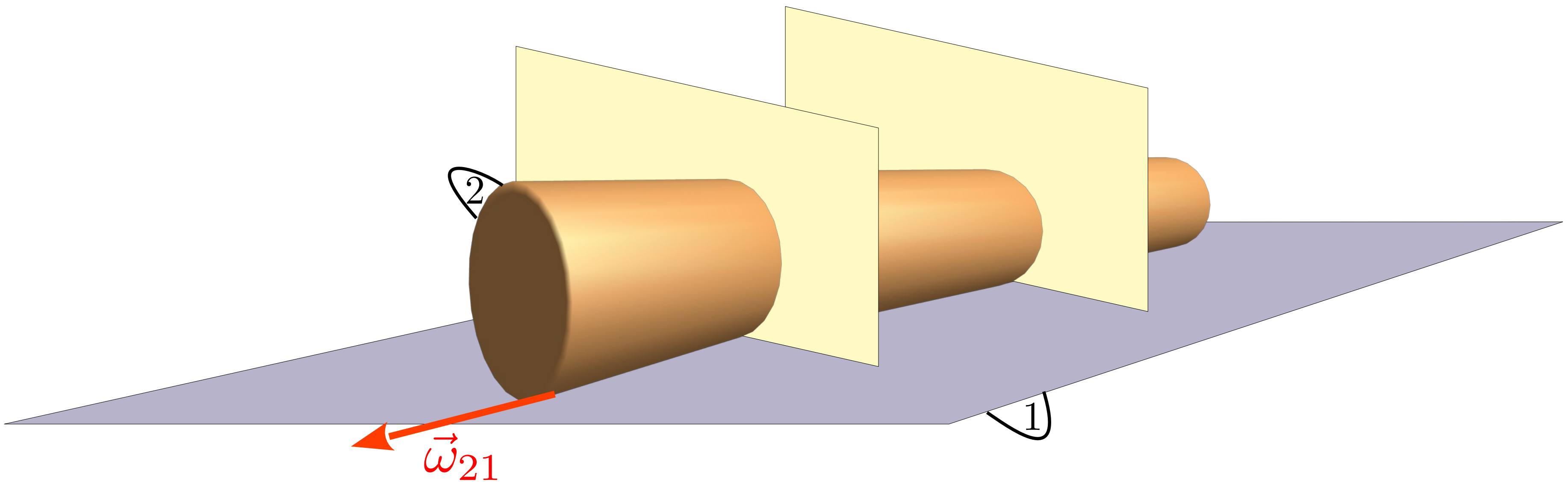
Universidad de Sevilla

Objetivos principales del tema

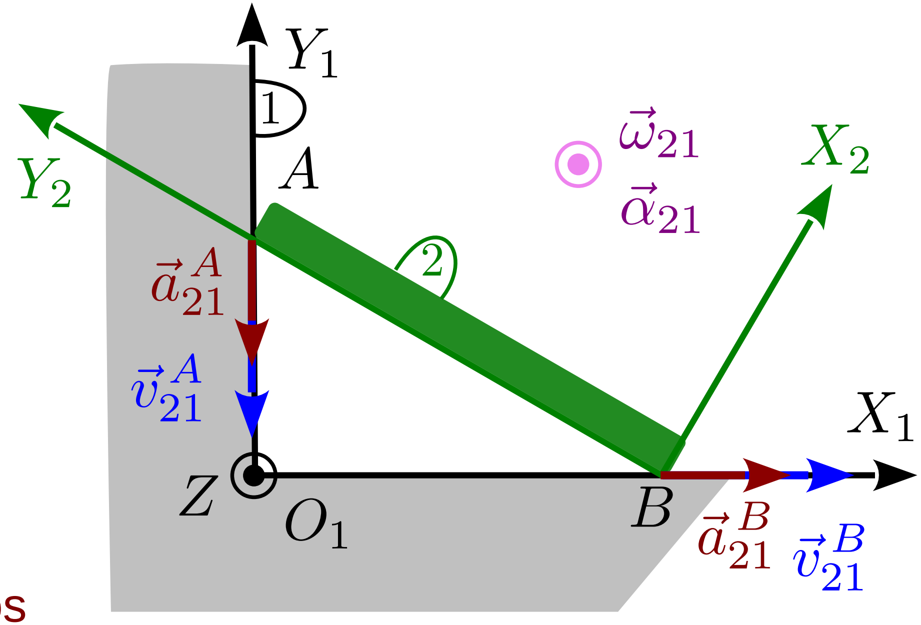
- Aprender conceptos y técnicas específicas del movimiento plano
  - Derivación temporal
  - Centro instantáneo de reducción
  - Teorema de los tres centros

Índice

- Las velocidades y aceleraciones son vectores paralelos a un plano
- Los valores de velocidades y aceleraciones se repiten en planos paralelos
- El sólido no tiene por qué ser plano
  - Ejemplo: un cilindro que rueda sin deslizar sobre un plano con dirección constante del vector rotación



Movimiento plano: definición y propiedades



- Todas las velocidades y aceleraciones son paralelas a un plano fijo: el plano director
- Los vectores velocidad y aceleración angular son perpendiculares al plano director
  - El eje Z es el mismo para todos los sólidos
- Hay tres grados de libertad

$$\vec{\omega}_{21} = \omega_{21}\,\vec{k}, \qquad \vec{v}_{21}^{\,P} = v_x\,\vec{\imath}_1 + v_y\,\vec{\jmath}_1$$

  - La derivada temporal es de la forma

$$\vec{\alpha}_{21} = \alpha_{21}\,\vec{k}, \qquad \vec{a}_{21}^{\,P} = a_x\,\vec{\imath}_1 + a_y\,\vec{\jmath}_1$$

  - El movimiento mas general es una rotación instantánea

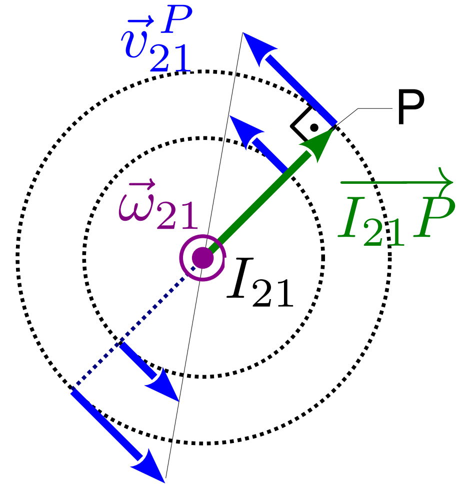
$$\vec{\omega}_{21} \perp \vec{v}_{21}^{\,P} = 0 \Longrightarrow v^{\text{mín}} = 0$$

Índice

- Definición y propiedades
- Centro instantáneo de rotación
  - Definición
  - Determinación gráfica y analítica
- Teorema de los tres centros
- Campo de aceleraciones

- Es la posición que coincide en cada instante con el punto del sólido que tiene velocidad nula

$$\vec{v}_{21}^{Q} = \vec{0} \Longrightarrow I_{21} \equiv Q$$



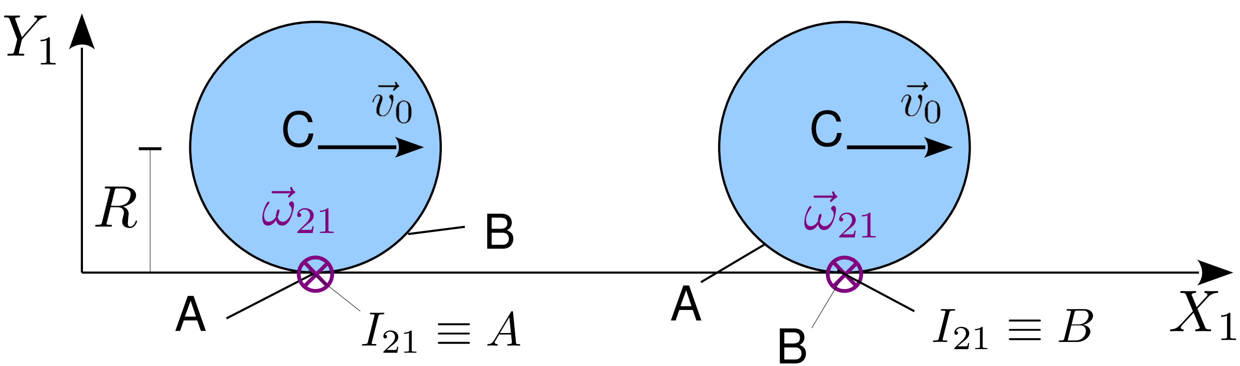
- El campo de velocidades tiene simetría rotacional alrededor del C.I.R.

$$\vec{v}_{21}^{P} = \cancelto{0}{\vec{v}_{21}^{I_{21}}} + \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{I_{21}P}$$

$$\vec{v}_{21}^{P} \perp \overrightarrow{I_{21}P}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{v}_{21}^{P}| = |\vec{\omega}_{21}||\overrightarrow{I_{21}P}|$$

- En general, la velocidad del C.I.R. **no es nula**
  - La velocidad del C.I.R. es la velocidad de sucesión

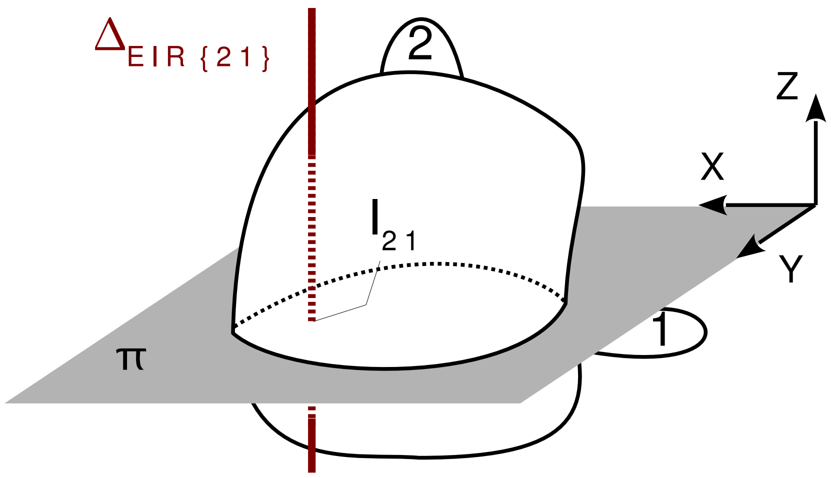


$$\vec{v}_{21}^{C} = v_0\,\vec{\imath}_1 \qquad \vec{\omega} = -\frac{v_0}{R}\,\vec{k}$$

$$\vec{v}_{21}^{CIR} = \vec{v}_{21}^{I_{21}} = v_0\,\vec{\imath}_1$$

Es la intersección del eje instantáneo de rotación y el plano director

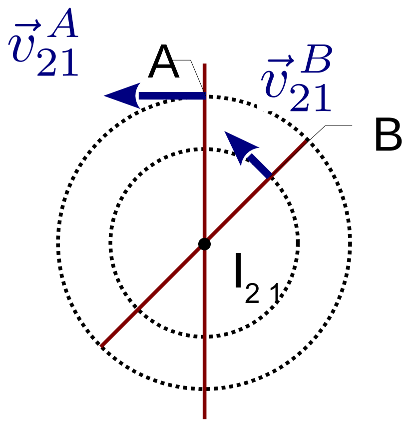
$$I_{21} \equiv \Delta_{\mathrm{EIR}\{21\}} \cap \pi_D$$



Caso 1

$\mathbf{v}^A_{21}$, $\mathbf{v}^B_{21}$ no paralelas

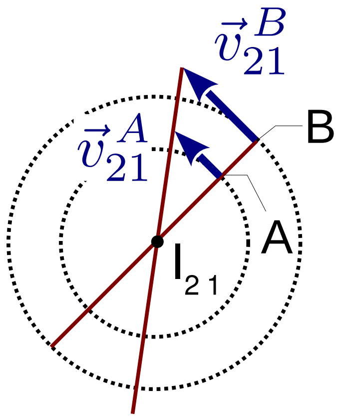
I_{21} es la intersección de las rectas trazadas por cada punto perpendicularmente a las velocidades respectivas



Caso 2

$\mathbf{v}^A_{21}$, $\mathbf{v}^B_{21}$ paralelas

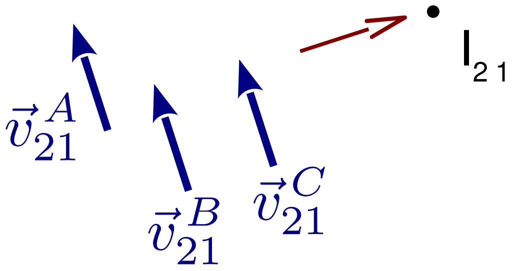
I_{21} es la intersección de las perpendicular común y la recta que une los extremos de los vectores velocidad



Traslación paralela

$\mathbf{v}_{21}$ es la misma en todos los puntos

I_{21} se considera en el infinito, en dirección perpendicular a la velocidad de traslación



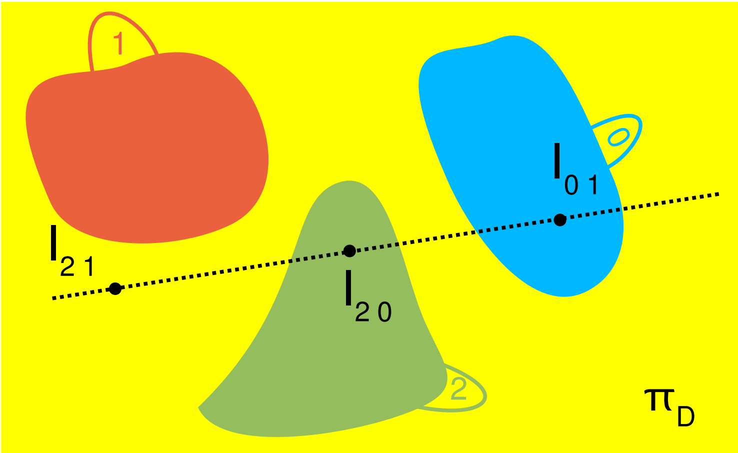
Determinación a partir de la reducción

$$\overrightarrow{OI}_{21} = \frac{\vec{\omega}_{21} \times \vec{v}^O_{21}}{|\vec{\omega}_{21}|^2}$$

- Definición y propiedades
- Centro instantáneo de rotación
  - Definición
  - Determinación gráfica y analítica
- Teorema de los tres centros
- Campo de aceleraciones

Enunciado

Si tres sólidos rígidos realizan movimientos relativos planos y paralelos entre sí, y se elige un plano director común, entonces los tres centros instantáneos de rotación están alineados

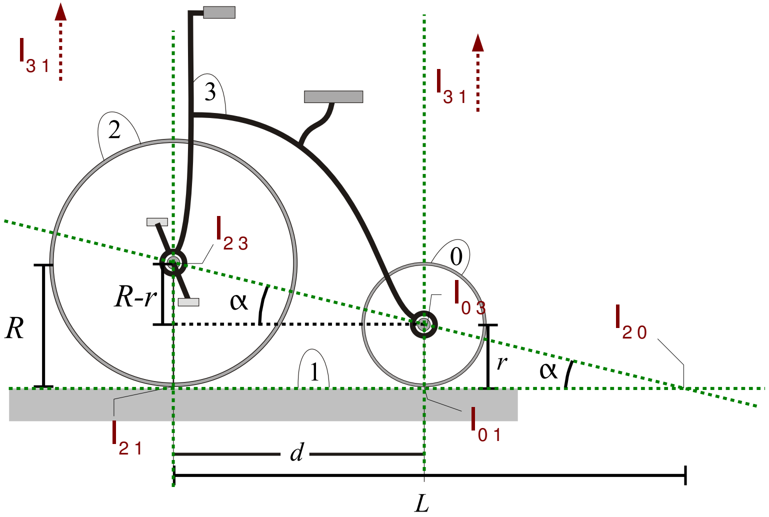


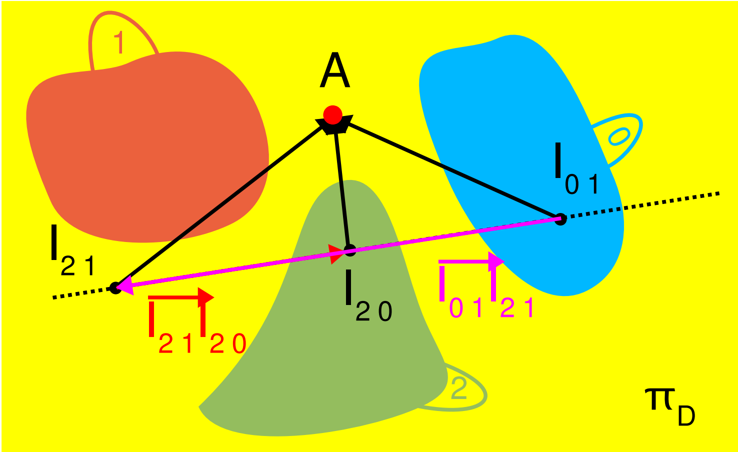
Aplicación

I_{20} se encuentra como intersección de $I_{23}I_{03}$ y $I_{21}I_{01}$

I_{31} se sitúa en el infinito

$$\tan\alpha = \frac{R}{L} = \frac{R-r}{d} \Longrightarrow L = \frac{R\,d}{R-r}$$





Punto A arbitrario $\vec{v}^{A}_{21} = \vec{v}^{A}_{20} + \vec{v}^{A}_{01}$

Campos de velocidades

$$\cancelto{0}{\vec{v}^{I_{21}}_{21}} + \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{I_{21}A} = \cancelto{0}{\vec{v}^{I_{20}}_{20}} + \vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{I_{20}A} + \cancelto{0}{\vec{v}^{I_{01}}_{01}} + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{I_{01}A}$$

Composición de velocidades angulares

$$(\vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01}) \times \overrightarrow{I_{21}A} = \vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{I_{20}A} + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{I_{01}A}$$

$$\vec{\omega}_{20} \times (\overrightarrow{I_{21}A} - \overrightarrow{I_{20}A}) = \vec{\omega}_{01} \times (\overrightarrow{I_{01}A} - \overrightarrow{I_{21}A}) \Longrightarrow \vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{I_{21}I_{20}} = \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{I_{01}I_{21}}$$

Multiplicando escalarmente por $\overrightarrow{I_{01}I_{21}}$

$$\overrightarrow{I_{01}I_{21}} \cdot (\vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{I_{21}I_{20}}) = \overrightarrow{I_{01}I_{21}} \cdot (\vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{I_{01}I_{21}}) = 0 \Longrightarrow \vec{\omega}_{20} \cdot (\overrightarrow{I_{21}I_{20}} \times \overrightarrow{I_{01}I_{21}}) = 0$$

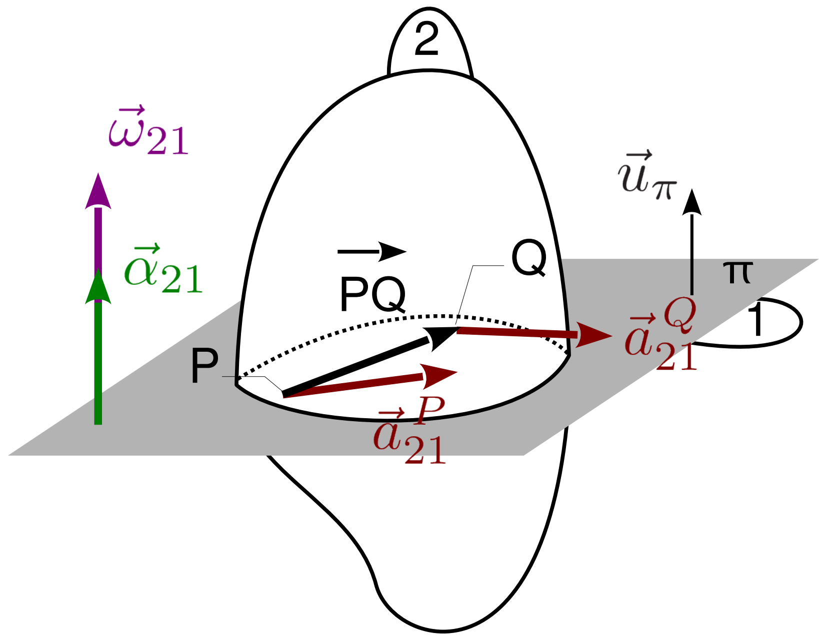
Como $\vec{\omega}_{20} \perp \pi_D$ y $\overrightarrow{I_{21}I_{20}} \times \overrightarrow{I_{01}I_{21}} \perp \pi_D$

$$\overrightarrow{I_{21}I_{20}} \times \overrightarrow{I_{01}I_{21}} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{I_{21}I_{20}} \parallel \overrightarrow{I_{01}I_{21}} \Longrightarrow \boxed{\{I_0, I_1, I_2\} \quad \text{alineados}}$$

Índice

- Definición y propiedades
- Centro instantáneo de rotación
  - Definición
  - Determinación gráfica y analítica
- Teorema de los tres centros
- Campo de aceleraciones

La ecuación del campo de velocidades se simplifica respecto al caso de movimiento tridimensional, pues $\boldsymbol{\omega}_{2\,1}$ y **PQ** son perpendiculares



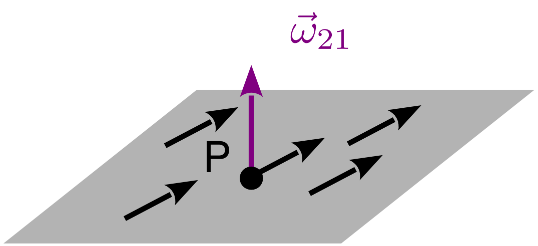
$$\vec{a}_{21}^{\,Q} = \vec{a}_{21}^{\,P} + \vec{\alpha}_{21} \times \overrightarrow{PQ} + \vec{\omega}_{21} \times (\vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{PQ})$$

$$\vec{\omega}_{21} \times (\vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{PQ}) = \begin{vmatrix} \vec{\omega}_{21} & \overrightarrow{PQ} \\ |\vec{\omega}_{21}|^2 & \cancel{\vec{\omega}_{21} \cdot \overrightarrow{PQ}} \end{vmatrix} = -|\vec{\omega}_{21}|^2 \overrightarrow{PQ}$$

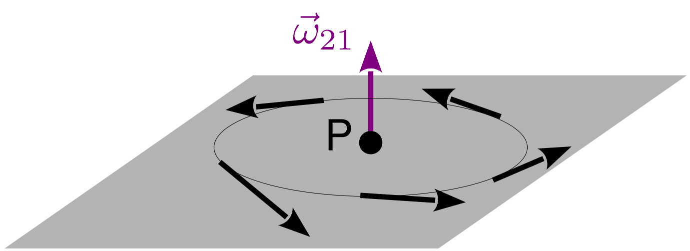
$$\boxed{\vec{a}_{21}^{\,Q} = \vec{a}_{21}^{\,P} + \vec{\alpha}_{21} \times \overrightarrow{PQ} - |\vec{\omega}_{21}|^2 \overrightarrow{PQ}}$$

El campo de aceleraciones recupera una cierta estructura

$\vec{a}_{21}^{\,P}$



$\vec{\alpha}_{21} \times \overrightarrow{PQ}$



$-|\vec{\omega}_{21}|^2 \overrightarrow{PQ}$